CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES STATISTICIENS ECONOMISTES

OPTION MATHEMATIQUES

Mai 1997

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

4 pages

Il est demandé aux candidats de souligner les résultats. La précision, la concision et la clarté des démonstrations seront des éléments essentiels d'appréciation. Aucun raisonnement incomplet ne sera pris en considération.

Les différentes parties du problème sont pour une large part indépendantes et pourront être abordées dans l'ordre qui convient au candidat. Les résultats d'une question, à condition d'être correctement cités, pourront être admis dans la suite du problème même s'ils n'ont pas été démontrés.

Notations et rappels :

R désigne le corps des réels et $\|.\|$ désigne la norme euclidienne de R^n, i.e. $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,

B désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 dans R^n, i.e. $B = \{x \in R^n : \|x\| < 1\}$,

S désigne la sphère de centre 0 et de rayon 1 dans R^n, i.e. $S = \{x \in R^n : \|x\| = 1\}$,

si X est un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E, $\bar{X}$ désigne l'adhérence de X et int X son intérieur,

si $g : A \to B$ est une application et $F \subset A$, $g\,|_F$ désigne la restriction de g à F,

si U est un ouvert de R^n et $f : U \to R^n$, f est dite de classe C^1 si elle est différentiable en tout point x de U (on note alors $df(x)$ sa différentielle en x) et si l'application $x \to df(x)$ est continue sur U,

enfin, si E est un R-espace vectoriel, un sous ensemble C de E est dit convexe si pour tout λ dans $[0,1]$ et tout couple (x,y) d'éléments de C, on a $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.

Tous les espaces vectoriels considérés seront en outre supposés complets.

Le but de ce problème est de démontrer la généralisation suivante d'un théorème dû à Brouwer "Soit E un R espace vectoriel muni d'un produit scalaire et de la norme qui lui est associée, soit K un convexe compact non vide de E et $f : K \to K$ une fonction continue, il existe alors un point x^* dans K tel que $f(x^*) = x^*$." Un tel point x^* est alors appelé point fixe de f.

I. De la dimension finie aux espaces de Hilbert

Dans cette partie, on suppose que dans un espace euclidien E de dimension finie toute fonction continue d'un convexe compact dans lui même admet un point fixe. On cherche à étendre ce résultat aux espaces de dimension quelconque. Ainsi, E désignera dans la suite un espace de dimension quelconque muni d'un produit scalaire et de la norme associée.

1. Soit F un fermé non vide de E et x un élément de E, on pose $d_F(x) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$. Montrer que la fonction d_F ainsi définie est continue sur E.

2. Soit K un convexe compact non vide de E et $\varepsilon > 0$ fixé, montrer qu'il existe un sous espace vectoriel E_ε de E, de dimension finie, tel que si l'on pose $F_\varepsilon = E_\varepsilon \cap K$ on ait

$$\forall x \in K, d_{F_\varepsilon}(x) \leq \varepsilon.$$

3. Montrer que pour tout x dans E, il existe un unique élément de F_ε, noté $\pi_\varepsilon(x)$, tel que $\|x - \pi_\varepsilon(x)\| = d_{F_\varepsilon}(x)$.

4. Montrer que l'application π_ε précédente vérifie,

$$\forall x \in E, \forall y \in F_\varepsilon, < x - \pi_\varepsilon(x), y - \pi_\varepsilon(x) > \leq 0.$$

5. Montrer que, $\forall x \in E, \forall y \in E, \|\pi_\varepsilon(x) - \pi_\varepsilon(y)\| \leq \|x - y\|$, en déduire que l'application π_ε est continue.

6. Soit $f : K \to K$ une application continue, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément x_ε dans K tel que $\pi_\varepsilon \circ f(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. En déduire que f admet au moins un point fixe dans K.

II. Un cas particulier

Dans cette partie nous allons démontrer le résultat en supposant que $E = R^2$ (on a donc $n = 2$), $K = \bar{B}$ et que $f : \bar{B} \to \bar{B}$ est de classe C^1 sur B, continue sur $\bar{B}$ et à dérivée uniformément bornée sur B.

1. Montrer que si f n'admet pas de point fixe sur $\bar{B}$ alors il existe une unique fonction C^1 sur B et continue sur $\bar{B}$, $g : \bar{B} \to S$ vérifiant : $\forall x \in \bar{B}, \exists \lambda \geq 0, g(x) = f(x) + \lambda(x - f(x))$.

Montrer que g vérifie alors que $g \mid_S = Id_S$, l'application identique de S.

2. Pour $\varepsilon \geq 0$ on définit l'application $g_\varepsilon : \bar{B} \to \bar{B}$ par $g_\varepsilon(x) = \varepsilon g(x) + (1 - \varepsilon)x$, pour tout x dans $\bar{B}$. Montrer que pour ε strictement positif suffisamment petit g_ε est injective.

3. Montrer que pour ε strictement positif suffisamment petit, $dg_\varepsilon(x)$ est inversible pour tout x dans B. Montrer que dans ce cas $g_\varepsilon(B)$ est un ouvert de B (on pourra utiliser le théorème d'inversion locale).

4. Montrer que $g_\varepsilon(B)$ est un fermé de B et en déduire que g_ε définit un difféomorphisme de B dans B pour ε strictement positif suffisamment petit.

5. Soit la fonction $P : [0,1] \to R$ définie pour $\varepsilon \in [0,1]$ par $P(\varepsilon) = \iint_B \det [dg_\varepsilon(x)]dx$, où det désigne le déterminant.

a) Montrer que P est constante sur un voisinage à droite de 0 (on remarquera que $\det [dg_\varepsilon(x)]$ est de signe constant sur B pour ε strictement positif suffisamment petit).

b) En déduire que P est constante sur $[0,1]$.

6. Calculer, pour $x \in B$, $\det dg_1(x)$ en déduire $P(1)$, comparer avec $P(0)$ et conclure.

III. Du différentiable au continu

Dans cette partie on suppose toujours que $E = R^2$.

1. Soit $r \in]0,1[$ et $\varphi_r : R^2 \to R$ définie par

$$\varphi_r(x) = (\|x\|^2 - r^2)^2 \text{ si } \|x\| < r \text{ et } \varphi_r(x) = 0 \text{ sinon,}$$

montrer que φ_r est de classe C^1 sur R^2.

2. Soit $h : \bar{B} \to R$ une fonction continue et soit $\lambda_r = \iint_B \varphi_r(x)dx$. On note $\bar{B}_r$ la boule fermée de centre 0 et de rayon $1 + r$ et on définit l'application $h_r : \bar{B} \to R$ par $h_r(x) = \frac{1}{\lambda_r} \iint_{\bar{B}_r} \varphi_r(x - u)h(\frac{u}{1+r})du$ pour tout x de $\bar{B}$. Vérifier que h_r est une fonction polynomiale en les coordonnées de x et que $h_{\frac{1}{n}}$ converge uniformément vers h sur $\bar{B}$.

3. Soit $f : \bar{B} \to \bar{B}$ une fonction continue, montrer qu'il existe une suite de fonctions (f_n)

de $\bar{B}$ dans $\bar{B}$ convergeant uniformément vers f sur $\bar{B}$ telles que pour tout n, f_n est C^1 sur B, continue sur $\bar{B}$ et à dérivée bornée sur B.

4. Montrer que la fonction f, définie à la question précédente, admet un point fixe sur $\bar{B}$.

IV. De la boule unité à un convexe compact non vide quelconque

Dans cette partie on se place dans un espace vectoriel de dimension finie n et on admet que les résultats démontrés au III pour $n = 2$, s'étendent aux dimensions supérieures, à savoir : si $f : \bar{B} \to \bar{B}$ est une fonction continue, alors elle admet un point fixe sur $\bar{B}$.

1. Soit K un convexe compact non vide de R^n tel que $0 \in$ int K et soit j l'application de E dans R définie par $j(0) = 0$ et $j(x) = \inf\{\alpha > 0 : x/\alpha \in K\}$ pour x non nul.

a) Montrer que pour x et y dans E et $\lambda \geq 0$, on a $j(\lambda x) = \lambda j(x)$ et $j(x + y) \leq j(x) + j(y)$.

b) Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs m et M tels que, pour tout x de E, on a $m\|x\| \leq j(x) \leq M\|x\|$. En déduire que j est continue sur E.

c) Montrer que $K = \{x \in E : j(x) \leq 1\}$.

d) On pose $h(x) = \frac{x}{\|x\|} j(x)$ pour x non nul et $h(0) = 0$. Montrer que h est un homéomorphisme de K dans $\bar{B}$.

e) Soit $f : K \to K$ continue, montrer en utilisant II que f admet un point fixe sur K.

2. Soit E un R-espace vectoriel normé de dimension finie et K un convexe compact de E d'intérieur non vide. Soit $f : K \to K$ continue, montrer que f admet un point fixe.

3. Dans cette question, K est un convexe compact non vide de R^n contenant 0. On note E le sous espace vectoriel engendré par K.

a) Montrer qu'il existe p points $x_1, \ldots, x_p$ de K , linéairement indépendants tels que E soit engendré par $(x_1, \ldots, x_p)$.

b) Soit l'application $\theta : R^p \to E$ définie par $\theta(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p$ pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ dans R^p. Montrer que θ est un homéomorphisme et que si l'on pose $\Delta = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in R^p : \lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_p > 0$ et $\lambda_1 + \ldots + \lambda_p < 1\}$ alors $\theta(\Delta) \subset K$.

c) En déduire que K est d'intérieur non vide pour la topologie induite sur E.

4. Si K est un convexe compact non vide d'un R-espace vectoriel E de dimension finie et $f : K \to K$ une fonction continue, montrer que f admet un point fixe sur K.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail